VRIJE UNIVERSITEIT AMSTERDAM

VU Research Portal

Braids, Floer homology and forcing in two and three dimensional dynamics

Wójcik, W.T.

2008

document version
Publisher's PDF, also known as Version of record

Link to publication in VU Research Portal

citation for published version (APA)
Wójcik, W. T. (2008). *Braids, Floer homology and forcing in two and three dimensional dynamics*. [PhD-Thesis - Research and graduation internal, Vrije Universiteit Amsterdam].

General rights
Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal ?

Take down policy
If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

E-mail address:
vuresearchportal.ub@vu.nl

Download date: 05. May. 2023

Samenvatting

Braids, Floer homologie en forcing in twee en drie dimensionale dynamica

Dit proefschrift behandelt methoden om laag-dimensionale dynamische systemen te onderzoeken door gebruik te maken van de specifieke topologische structuren die relevant zijn in twee en drie dimensies. In wezen beschouwen we oplossingen, of banen, als braids (vlechtwerken) en links in drie dimensies. Dit proefschrift kan onderverdeeld worden in twee stukken. In het eerste gedeelte passen we de Conley index theorie voor braid diagrammen, zoals ontwikkeld door R. Ghrist, J.B. van den Berg en R.C.A.M. van der Vorst in 2003, toe op oriëntatie omkerende twist afbeeldingen van het vlak. In het tweede gedeelte behandelen we de ontwikkeling van een invariant voor de relatieve braid klassen, de zogenaamde Floer homologie. Dit is een algebraïsch topologische structuur die gebruikt kan worden om forcing resultaten voor periodieke oplossingen van de Hamilton vergelijkingen te verkrijgen. De technieken geïntroduceerd in [**34**], die we in het eerste gedeelte aanwenden, zijn alleen toepasbaar op positieve braids, terwijl de Floer homologie bruikbaar is voor *alle* braids (met zowel positieve als negatieve generatoren).

De twee onderwerpen in het proefschrift delen dezelfde methodologie: in beide gevallen gebruiken we variationele principes. Deze stellen ons in staat om de periodieke oplossingen van het systeem in kwestie als kritieke punten van zekere actie-functionalen te beschouwen. Deze laatsten definiëren we op ruimten van braids, en we introduceren gradiënt-achtige flows, die gerelateerd zijn aan de functionalen, op deze ruimten. De stationaire punten van deze flows corresponderen met de periodieke oplossingen van de originele systemen. De ruimten van braids worden opgedeeld in samenhangscomponenten die braid klassen worden genoemd. De eigenschappen van de gradiënt-achtige flows op de braid klassen zorgen ervoor dat deze klassen, onder de juiste aannames, isolerend zijn zodat we de dynamica kunnen beperken tot deze klassen.

In Hoofdstuk 2 bestuderen we forcing in oriëntatie omkerende twist afbeeldingen. Eerst merken we op dat de vierde herhaalde van zulke afbeeldingen uitgedrukt kan worden als de compositie van vier oriëntatie *behoudende* twist afbeeldingen. Dan herformuleren we het probleem in termen van parabolische flows, die de natuurlijke dynamica beschrijven op een bepaalde ruimte van braid diagrammen. Vervolgens beschouwen we periode-4 punten, die we kunnen classificeren in termen van corresponderende braid diagrammen. Deze kunnen onderverdeeld worden in twee typen. Als een oriëntatie omkerende twist afbeelding een periode-4 punt van het ene type heeft dan kunnen we existentie van een semi-conjugatie met symbolische dynamica laten zien, waarmee we bewijzen dat het systeem chaotisch is. We laten ook zien dat het andere type (van periode-4 punten) niet tot chaos leidt.

In Hoofdstuk 3 presenteren we een manier om de periodieke oplossingen van de Hamilton vergelijkingen te interpreteren als braids. Vervolgens definiëren we de corresponderende functionaal. De L^2 'gradiënt-flow' van deze functionaal op de ruimte van braids kan gezien worden als een verzameling van onafhankelijke Cauchy-Riemann vergelijkingen, die aan elkaar gekoppeld zijn via randvoorwaarden komend van de braid structuur. Omdat het beginwaardeprobleem niet goed gesteld is, beschouwen we alleen de ruimte van begrensde oplossingen. We bewijzen dat deze verzameling compact is in de C^1_{loc} topology. Daarna laten we zien dat de zogenaamde 'natuurlijke' braid klassen isolerende omgevingen vormen voor de Cauchy-Riemann 'flow'. Dit volgt uit het kruisingsprincipe dat zegt dat langs de evolutie van het systeem het kruisingsgetal van de braid (gedefinieerd als het verschil tussen het aantal negatieve kruisingen en het aantal positieve kruisingen) alleen kan afnemen.

Vervolgens definiëren we een relatieve index voor de stationaire braids van de Cauchy-Riemann vergelijkingen. We behandelen een aantal transversaliteitsargumenten waarmee we kunnen bewijzen dat in het algemeen de ruimte van verbindende banen tussen twee stationaire punten een variëteit zonder rand is. De dimensie wordt gegeven door het verschil van de indices van de stationaire limietpunten. Dit leidt tot de definitie van Floer homologie voor natuurlijke relatieve braid klassen. Deze homologie hangt alleen af van de relatieve braid klasse.

Met dit zijn we in staat om resultaten te behalen over de Floer homologie in Hoofdstuk 4. In het bijzonder vinden we een tegenhanger van de Morse ongelijkheden, die ervoor zorgen dat we, in het generieke geval, het aantal kritieke punten van index k van beneden kunnen afschatten met het k-de Betti getal. Vervolgens gebruiken we de Garside normaalvorm van de braids om een braid te beschrijven als positief gedeelte gevolgd door een aantal halve (hele) twists. We laten zien dat de Floer homologie van een braid klasse gelijk is aan de op de juiste wijze verschoven Floer homologie van het positieve gedeelte van de Garside normaalvorm van de braid. We eindigen het hoofdstuk met berekeningen van de Floer homologie voor verschillende braid klassen van cyclisch type.